ANÀLISI EN VARIETATS DE DIMENSIÓ INFINITA
Aplicació a un problema d'ones gravitatòries

JOAN GIRBAU
Membre de la Secció de Ciències i Tecnologia de l'Institut d'Estudis Catalans
Professor de la Universitat Autònoma de Barcelona

SUMMARY

The aim of this article is to furnish a unified and simple version of a collection of papers by A. Fischer, J. Marsden and V. Moncrief giving sufficient conditions for a vacuum space-time to be stable under linearization of Einstein's equation.

INTRODUCCIÓ

El concepte de varietat diferenciable de dimensió infinita s'ha revelat molt útil durant aquest segle per tal de resoldre qüestions ben concretes que sorgeixen en altres contextos. A vegades la clau de la solució d'un problema determinat rau en el fet de saber trobar el marc adequat on pugui ésser formulat de manera senzilla. Nosaltres presentarem aquí un problema molt interessant relatiu a l'equació que governa la propagació de les ones gravitatòries en el marc de la Relativitat General, i mostrarem com es pot resoldre de manera senzilla i elegant usant la teoria de varietats diferenciables de dimensió infinita, modelades en un espai de Hilbert. La raó que ens ha portat a interessar-nos per aquest problema ha estat l'extraordinària semblança dels mètodes emprats en la seva resolució amb les tècniques que nosaltres hem utilitzat en alguns dels nostres treballs de recerca en un camp completament diferent (vegeu [5] i [6], per exemple).

Un camp gravitatori ve descrit per una mètrica de l'espai-temps. Suposem que partim d'una mètrica inicial g, que per a fixar les idees pot ésser la de Minkowski (que correspon a l'absència de camp gravitatori) o la de Schwarzschild (que és la que descriu el camp gravitatori d'una estrella esfèrica a l'exterior de l'estrella), i que volem estudiar la pertorbació en el camp gravitatori inicial produïda per un altre cos –una estrella, per exemple–. El nou camp gravitatori pertorbat vindrà descrit per una mètrica g'. Designem per h la diferència $g' - g$, de manera que g' s'expressi com a $g' = g + h$. La mètrica g' ha de complir l'equació d'Einsten, que en el buit és $\mathcal{R}(g') = 0$, on $\mathcal{R}(g')$ indica el tensor de Ricci de g'. Des de molt antic hom ha volgut estudiar l'equació anterior en termes de

h. Com que aquesta equació (equivalent a un sistema no lineal d'equacions en derivades parcials de segon ordre) és molt complicada, els investigadors s'han ocupat preferentment, des de fa temps, de l'equació linealitzada que s'obté de l'anterior quan hom pren només els termes lineals en h i hom negligeix els altres termes (quan la mètrica inicial g és la de Minkowski aquesta equació es relaciona amb la clàssica equació d'ona).

Aquesta manera de procedir fa sorgir de manera natural la pregunta següent: les solucions de l'equació d'Einstein linealitzada són pròximes a les solucions de l'equació sense linealitzar? Si la resposta a aquesta qüestió és negativa, l'equació linealitzada no ens serveix absolutament per a res. Quan la mètrica inicial g sigui tal que la resposta a la pregunta anterior sigui afirmativa per a qualsevol h petit, direm que g és estable per linealització de l'equació d'Einstein. Quines condicions ha de complir g per a tenir aquesta propietat? Y. Choquet-Bruhat i S. Deser demostraren [1] que la mètrica de Minkowski és estable en aquest sentit. Però, ¿quan ho és una mètrica g més general que la de Minkowski? A. Fischer, J. Marsden i V. Moncrief ([2], [4] i [8]) donaren condicions senzilles per tal que la mètrica g tingui aquesta propietat. Els seus treballs, extremadament elegants, utilitzen, d'una part, la teoria de varietats de dimensió infinita i, de l'altra, la teoria d'operadors el·líptics. Eles resultats d'aquests investigadors han estat després generalitzats en diverses direccions (vegeu [7], per exemple), però sempre per a l'equació d'Einstein en el buit.

En el treball present farem una presentació unificada dels resultats de Fischer, Marsden i Moncrief, que a la literatura es troben dispersos en diversos articles, i simplificarem els seus càlculs, separant allò que és essencial del superflu o accessori. Pensem que la nostra presentació pot servir per a poder abordar en un futur el mateix problema per a l'equació d'Einstein amb matèria (qüestió oberta, extraordinàriament interessant).

1. DEFORMACIÓ DEL TENSOR DE RICCI ORIGINADA PER UNA DEFORMACIÓ DE LA MÈTRICA

Sigui (V, g) una varietat de Lorentz. Designem per $\mathcal{R}$ el tensor de Ricci de g. Sigui g' una mètrica de Lorentz pròxima a g, $g' = g + h$, on h és un tensor dues vegades covariant i simètric pròxim a zero. Sigui $\mathcal{R}'$ el tensor de Ricci de g'. Voldríem establir una relació entre $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}'$ en funció de h; és a dir, voldríem una expressió de la forma $\mathcal{R}' = \mathcal{R}$ + termes en h. Per tal de fer això, començarem comparant els tensors de curvatura de g' i de g.

Sigui ∇' la derivada covariant corresponent a g', i ∇ la derivada covariant corresponent a g. Sigui Q el tensor dues vegades covariant i una vegada contravariant definit per l'expressió $Q(X, Y) = \nabla'_X Y - \nabla_X Y$. El tensor Q és simètric. Si designem per $R'(X, Y)Z$ el tensor de curvatura de g' i per $R(X, Y)Z$ el de g, dindrem:

$$R'(X, Y)Z = \nabla'_X \nabla'_Y Z - \nabla'_Y \nabla'_X Z - \nabla'_{[X, Y]} Z$$
$$= \nabla'_X(\nabla_Y Z + Q(Y, Z)) - \nabla'_Y(\nabla_X Z + Q(X, Z)) - \nabla_{[X, Y]} Z - Q([X, Y], Z) =$$

$= \nabla_X \nabla_Y Z + Q(X, \nabla_Y Z) + \nabla_X Q(Y, Z) + Q(X, Q(Y, Z)) -$
el mateix, permutant X i $Y - \nabla_{[X, Y]} Z - Q([X, Y], Z) =$
$= R(X, Y)Z + Q(X, \nabla_Y Z) + \nabla_X Q(Y, Z) + Q(X, Q(Y, Z)) -$
$-$el mateix, permutant X i $Y - Q([X, Y], Z)$.

Recordem que $\nabla_X Q$ s'expressa de la forma següent:

$$(\nabla_X Q)(Y, Z) = \nabla_X Q(Y, Z) - Q(\nabla_X Y, Z) - Q(Y, \nabla_X Z).$$

Si a l'expressió anterior de $R'(X, Y)Z$ substituïm el terme $\nabla_X Q(Y, Z)$ per $(\nabla_X Q)(Y, Z) + Q(\nabla_X Y, Z) + Q(Y, \nabla_X Z)$, tindrem:

$$\begin{aligned} R'(X, Y)Z = {} & R(X, Y)Z + (\nabla_X Q)(Y, Z) - (\nabla_Y Q)(X, Z) + \\ & + Q(X, Q(Y, Z)) - Q(Y, Q(Y, Z)). \end{aligned}$$

Expressem ara aquesta mateixa fórmula en components. Adoptem aquí la següent convenció per a designar les components de $R(X, Y)\, Z$ i de $\nabla_X Q$ en una carta local (U, x^1, x^2, x^3, x^4):

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}, \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)\frac{\partial}{\partial x^\nu} = R^\rho_{\nu\lambda\mu}\, \frac{\partial}{\partial x^\rho}$$

$$\left(\nabla_{\frac{\delta}{\vartheta x^\lambda}} Q\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = \nabla_\lambda Q^\rho_{\mu\nu}\, \frac{\partial}{\partial x^\rho}\,.$$

(Això últim s'ha de prendre com a definició dels nombres $\nabla_\lambda Q^\rho_{\mu\nu}$). Amb aquestes convencions, l'expressió anterior de $R'(X, Y)Z$ s'escriu en components de la manera següent:

$$R'^{\rho}_{\nu\lambda\mu} = R^{\rho}_{\nu\lambda\mu} + \nabla_\lambda Q^\rho_{\mu\nu} - \nabla_\mu Q^{\rho}_{\lambda\nu} + Q^{\rho}_{\lambda\alpha} Q^{\alpha}_{\mu\nu} - Q^{\rho}_{\mu\alpha} Q^{\alpha}_{\lambda\nu}\,.$$

Fent ara la contracció de ρ i λ en aquesta expressió, obtenim la fórmula següent que relaciona els tensors de Ricci de g i de g':

$$\mathcal{R}'_{\nu\mu} = \mathcal{R}_{\nu\mu} + \nabla_\rho Q^\rho_{\mu\nu} - \nabla_\mu Q^\rho_{\rho\nu} + Q^\rho_{\rho\alpha} Q^\alpha_{\mu\nu} - Q^\rho_{\mu\alpha} Q^\alpha_{\rho\nu}\,. \qquad (1)$$

Calculem ara el tensor Q en funció de la mètrica inicial g. Utilitzant la fórmula de Riemann que dóna la connexió ∇' en funció de g', tindrem:

$$
\begin{aligned}
2g'(Q(X, Y), Z) = 2g'(\nabla'_X Y - \nabla_X Y, Z) = \\
& X(g'(Y, Z)) + Y(g'(Z, X)) - Z(g'(X, Y)) - g'(X, [Y, Z]) \\
& - g'(Y, [X, Z]) - g'(Z, [Y, X]) - 2g'(\nabla_X Y, Z) .
\end{aligned}
$$

Substituint aquí g' per $g + h$ i utilitzant altra vegada la fórmula de Riemann, ens queda:

$$
\begin{aligned}
2g'(Q(X, Y), Z) = & X(h(Y, Z)) + Y(h(Z, X)) - Z(h(X, Y)) - h(X, [Y, Z]) \\
& - h(Y, [X, Z]) - h(Z, [Y, X]) - 2h(\nabla_X Y, Z) .
\end{aligned}
$$

Substituïm ara el terme $X(h(Y, Z))$ d'aquesta expressió per $(\nabla_X h)(Y, Z) + h(\nabla_X Y, Z) + h(Y, \nabla_X Z)$, i els termes $Yh(Z, X)$ i $Zh(X, Y))$ per expressions similars. Ens queda, finalment:

$$2g'(Q(X, Y), Z) = (\nabla_X h)(Y, Z) + (\nabla_Y h)(Z, X) - (\nabla_Z h)(X, Y) .$$

Aquesta fórmula s'expressa en components de la manera següent:

$$Q^{\rho}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g'^{\rho\nu} (\nabla_\lambda h_{\mu\nu} + \nabla_\mu h_{\nu\lambda} - \nabla_\nu h_{\lambda\mu}) , \tag{2}$$

on $(g'^{\rho\nu})$ indica, com sempre, la matriu inversa de $(g'_{\rho\nu})$. Si posem $g' = g + h$ i substituïm (2) en (1), obtindrem la fórmula que relaciona els tensors de Ricci de g' i de g, en función de h. Els termes de primer ordre en h d'aquesta fórmula constitueixen una expressió molt més senzilla que ens proposem obtenir tot seguit. Comemcem calculant la matriu inversa g'^{-1} que figura a (2). De $g' = g + h = g(1 + g^{-1} h)$, on 1 indica la matriu identitat, deduïm $g'^{-1} = (1 + g^{-1} h)^{-1} g^{-1}$. Designem per H la matriu $g^{-1} h$. Com que

$$(1 + H)^{-1} = 1 - H + H^2 - H^3 + \dots ,$$

negligint els termes d'ordre > 1 en h, tindrem $g'^{-1} = (1 + H)^{-1} g^{-1} \approx g^{-1} - Hg^{-1} = g^{-1} - g^{-1} hg^{-1}$. Per tant:

$$g'^{\lambda\mu} \approx g^{\lambda\mu} - g^{\lambda\nu} h_{\nu\rho} g^{\rho\mu}.$$

D'ara endavant utilitzarem la mètrica inicial g per a identificar cada espai tangent amb el seu dual. Això ens permetrà identificar, quan ens convingui, tensors covariants i contravariants (pujarem i baixarem índexs utilitzant la mètrica inicial g). La fórmula anterior s'escriu llavors:

$$g'^{\lambda\mu} \approx g^{\lambda\mu} - h^{\lambda\mu}.$$

Substituint aquesta expressió a (2) i suprimint els termes d'ordre > 1 en h, obtindrem:

$$Q^{\rho}_{\lambda\mu} \approx \frac{1}{2} g^{\rho\nu} (\nabla_\lambda h_{\mu\nu} + \nabla_\mu h_{\nu\lambda} - \nabla_\nu h_{\lambda\mu}), \tag{3}$$

Quan substituïm aquesta expressió a (1), els termes en què hi ha un producte de dos Q resultaran d'ordre > 1 en h. Per tant només haurem de calcular en funció de h els termes en què hi ha una derivada covariant de Q. Operant, tenim finalment:

$$\mathcal{R}'_{\nu\mu} \approx \mathcal{R}_{\nu\mu} + \frac{1}{2} g^{\rho\alpha} (\nabla_\rho \nabla_\mu h_{\nu\alpha} + \nabla_\rho \nabla_\nu h_{\alpha\mu} - \nabla_\rho \nabla_\alpha h_{\mu\nu}) - \frac{1}{2} \nabla_\mu \nabla_\nu \operatorname{tr} h, \tag{4}$$

on tr h designa la traça de h, o sigui, $g^{\rho\alpha} h_{\rho\alpha}$.

2. UN ENTORN D'UNA HIPERSUPERFÍCIE ESPACIAL

Sigui $(V, \tilde{g})$ un espai-temps (varietat de Lorentz amb una orientació temporal). Sigui M una hipersuperfície espacial de V. Sigui T un camp vectorial sobre V que apunti cap al futur. Designem per $\{\varphi_t\}$ el grup uniparamètric local corresponent a T. Si la hipersuperfície M és compacta, llavors existeix $\varepsilon > 0$ tal que l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M} \times (-\varepsilon, \varepsilon) & \overset{\Phi}{\rightarrow} & V \\ (x, t) & \rightarrow & \varphi_t(x) \end{array} \tag{5}$$

és un difeomorfisme de $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ sobre un obert V_M de V. Nosaltres no suposarem pas, de moment, que M és compacta, però sí que suposarem que M, V i el camp T són tals que existeix $\varepsilon > 0$ de manera que Φ compleix la condició anterior. D'ara endavant treballarem només a la varietat $(V_M, \tilde{g})$ i oblidarem la varietat inicial $(V, \tilde{g})$. Per a cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ designarem per M_t la subvarietat $\varphi_t(M)$ de V_M. Di X és un camp vectorial qualsevol de M, designarem també per X el camp sobre V_M que en cada punt $\varphi_t(x)$ de V_M val $X_{\varphi_t(x)} = (\varphi_t)_* X_x$. D'aquesta manera tot camp X sobre M dóna lloc a un camp X sobre V_M tangent a les hipersuperfícies M_t. Designarem per N el camp vectorial sobre V_M que és unitari, normal a les hipersuperfícies M_t i que apunta cap al futur (unitari en el sentit que $\tilde{g}(N, N) = -1$). Designarem també per $\partial/\partial t$ el camp T ja que T es la imatge pel difeomorfisme Φ del camp $\partial/\partial t$ de $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Sigui f la component normal de $\partial/\partial t$. Sigui U el camp definit per la diferència $fN - \partial/\partial t$. Tindrem $\tilde{g}(U, N) = \tilde{g}(fN - \partial/\partial t, N) = -f + f = 0$. Per tant, U és tangent a les hipersuperfícies M_t i es té:

$$N = \frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{f}U, \tag{6}$$

Si X és un camp de M (i per tant, un camp de V_M tangent a les M_t), de (6) s'obté immediatament l'expressió següent:

$$[X, N] = -\frac{X(f)}{f}N + \frac{1}{f}[X, U]. \tag{7}$$

Designem per $\tilde{\nabla}$ la derivada covariant corresponent a la mètrica $\tilde{g}$. Anem a calcular $\tilde{\nabla}_N N$. Derivant covariantment la igualtat $\tilde{g}(N, N) = -1$, deduïm que $\tilde{\nabla}_N N$ és perpendicular a N. D'altra banda, si X és tangent a les M_t, de la fórmula de Riemann que dóna la derivada covariant en funció de la mètrica es dedueix:

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_N N, X) = \tilde{g}([X, N], N) = \frac{X(f)}{f}$$

(l'última igualtat, en virtut de (7)). Si indiquem per $d_M f$ la 1-forma sobre V_M obtinguda diferenciant exteriorment a cada M_t la restricció de f a M_t, tindrem $(d_M f)(X) = X(f)$ i, per tant, $\tilde{g}(\tilde{\nabla}_N N, X) = (1/f)(d_M f)(X)$. De tot això deduïm:

$$\tilde{\nabla}_N N = \frac{1}{f}\,\#\,d_M f. \tag{8}$$

on $\#\, d_M f$ indica el camp vectorial tangent a totes les M_t corresponent a la 1-forma $d_M f$ a través de la mètrica.

3. ENUNCIAT DELS PRINCIPALS RESULTATS DE FISCHER, MARSDEN I MONCRIEF

Partim d'un espai-temps $(V, \tilde{g})$ com a la Secció 2. Considerem una hipersuperfície espacial M de V i un camp vectorial T sobre V. Sigui φ_t el grup uniparamètric local corresponent a T. Suposem, com a la Secció 2, que existeix

$\varepsilon > 0$ tal que $\varphi_t(x)$ està definit per a tot $x \in M$ i tot $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, i que la imatge V_M de $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ per l'aplicació Φ donada per (5) de la Secció 2 és un obert de V. Des d'ara treballarem en la varietat $(V_M, \tilde{g})$ i oblidarem la varietat inicial $(V, \tilde{g})$. Sigui $\tilde{S}_2$ l'espai dels camps tensorials sobre V_M, dues vegades covariants *i* simètrics. Sigui $\tilde{h} \in \tilde{S}_2$ suficientment pròxim a zero per tal que $\tilde{g} + \tilde{h}$ sigui encara una mètrica de Lorentz. Suposem que la mètrica inicial $\tilde{g}$ compleix l'equació d'Einstein en el buit $\mathfrak{R}(\tilde{g}) = 0$, on $\mathfrak{R}(\tilde{g})$ indica el tensor de Ricci de la mètrica $\tilde{g}$. Suposem que $\tilde{h}$ compleix l'equació

$$\text{Part lineal en } \tilde{h} \text{ de } \mathfrak{R}(\tilde{g} + \tilde{h}) = 0 . \tag{9}$$

En virtut de (4) aquesta equació s'escriu així:

$$\tilde{g}^{\rho\alpha}(\tilde{\nabla}_\rho \tilde{\nabla}_\mu \tilde{h}_{\nu\alpha} + \tilde{\nabla}_\rho \tilde{\nabla}_\nu \tilde{h}_{\alpha\mu} - \tilde{\nabla}_\rho \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{h}_{\mu\nu}) - \tilde{\nabla}_\mu \tilde{\nabla}_\nu \operatorname{tr} \tilde{h} = 0 .$$

Volem donar condicions sobre la mètrica inicial $\tilde{g}$ de V_M per tal que existeixi una corba $t \to \tilde{g}(t)$ a l'espai de mètriques de Lorentz sobre V_M que compleixi $\mathfrak{R}(\tilde{g}(t)) = 0$ per a tot t petit, i que compleixi $\tilde{g}(0) = \tilde{g}$ i $(d\tilde{g}(t)/dt)_{t=0} = \tilde{h}$, qualsevol que sigui $\tilde{h} \in \tilde{S}_2$ suficientment pròxim a zero que compleixi (9). Dit d'una altra manera, per tal que cada solució $\tilde{h}$ de l'equació (9) aproximi una solució de l'equació d'Einstein en el buit (sense linealitzar) $\mathfrak{R}(\tilde{g} + \tilde{h}) = 0$. Quan la mètrica inicial $\tilde{g}$ tingui aquesta propietat, direm que és linealment estable per a l'equació d'Einstein en el buit o, de manera abreujada, que la mètrica és linealment estable. Fischer, Marsden i Moncrief demostraren ([2], [4] i [8]) que quan M és compacta una condició suficient perquè una mètrica a V_M sigui linealment estable és que no tingui isometries infinitesimals. Els seus mètodes no demostren tan sols aquest resultat sinó que permeten establir resultats del mateix estil quan M és no compacta. Per exemple, es pot veure per llur procediment que la mètrica de Minkowski de $\mathbf{R}^4$ és linealment estable (això ja havia estat obtingut per Choquet-Bruhat i Deser [1]).

4. ECUACIONS DE GAUSS I CODAZZI DE LA HIPERSUPERFÍCIE M A V_M

Reprenem aquí les notacions de la Secció 2. Designem per S_t la segona forma quadràtica de la hipersuperfície M_t. Per comoditat, d'ara endavant ometrem la t de S_t. En les varietats de Lorentz prenem com a definició de *segona forma quadràtica* d'una hipersuperfície espacial M, la següent: $S(X, Y) = -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, N)$, on X i Y són tangents. Si ∇ indica la derivada covariant de la mètrica de Riemann g de M obtinguda per restricció de $\tilde{g}$, tindrem $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X, Y) N$. Designem per $\tilde{R}$ el tensor de curvatura de $(V_M, \tilde{g})$ i per R el tensor de curvatura de (M, g). Si X, Y, Z són camps tangents a M, de les definicions de $\tilde{R}(X, Y) Z$, de $R(X, Y) Z$ i de S s'obté fàcilment

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X, Y)\, Z = R(X, Y)\, Z + S(Y, Z)\tilde{\nabla}_X N - S(X, Z)\tilde{\nabla}_Y N + \\ +\{(\nabla_X S)\,(Y, Z) - (\nabla_Y)\,(X, Z)\}\, N\,.\end{aligned} \tag{10}$$

De (10), obtenim immediatament les dues identitats següents:

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)\, Z, N) = -\,(\nabla_X S)\,(Y, Z) + (\nabla_Y S)\,(X, Z) \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{R}(X, Y)\, Z, W) = \tilde{g}\,(R(X, Y)\, Z, W) + \\ + S(Y, Z)\, S(X, W) - S(X, Z)\, S(Y, W)\,,\end{aligned} \tag{12}$$

on X, Y, Z i W són tangents a les M_t.

Sigui P l'endomorfisme associat a S per la mètrica. P està definit per $\tilde{g}(P(X), Y) = S(X, Y)$. Com que $\tilde{g}(N, Y) = 0$, tindrem $\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X N, Y) = -\,\tilde{g}(N, \tilde{\nabla}_X Y) = S(X, Y)$. Per tant, $P(X) = \tilde{\nabla}_X N$. Calculem ara $\tilde{R}(N, X)\, N$ quan X és un camp tangent a M. Tindrem:

$$\tilde{R}(N, X)\, N = \tilde{\nabla}_N \tilde{\nabla}_X N - \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_N N - \tilde{\nabla}_{[N, X]} N =$$

$$\tilde{\nabla}_N P(X) - \tilde{\nabla}_X \left(\frac{\# d_M f}{f}\right) - \tilde{\nabla}_{\frac{X(f)}{f} N} N - \tilde{\nabla}_{\frac{1}{f}[U, X]} N\,.$$

Multiplicant escalarment aquesta igualtat per un camp Y tangent a M i operant, s'obté:

$$\begin{aligned}\tilde{g}\,(\tilde{R}(N, X)\, N, Y) = N(S(X, Y)) - S(X, P(Y)) - \frac{1}{f}\, S(X, [U, Y]) \\ - \frac{1}{f}\,(\nabla^2 f)\,(X, Y) - \frac{1}{f}\, S([U, X], Y)\,,\end{aligned} \tag{13}$$

on $\nabla^2 f$ és la 2-forma $(\nabla^2 f)\,(X, Y) = \nabla_X(\nabla(f))\,(Y) = (\nabla_X d_M f)\,(Y)$. Tenint present l'expressió de la derivada de Lie d'un 2-tensor covariant:

$$(L_U S)\,(X, Y) = U(S(X, Y)) - S([U, X], Y) - S(X, [U, Y])\,,$$

i substituint al segon membre de (13) N per $(1/f)\partial/\partial t + (1/f)\, U$, tindrem finalment:

$$\tilde{g}(\tilde{R}(N, X)N, Y) = \frac{1}{f}\frac{\partial S(X, Y)}{\partial t} + \frac{1}{f}(L_U S)(X, Y) - \\ - S(X, P(Y)) - \frac{1}{f}(\nabla^2 f)(X, Y), \tag{14}$$

5. PROBLEMA DE CAUCHY DE L'EQUACIÓ $\mathcal{R}(\tilde{g}) = 0$ AMB DADES INICIALS A LA HIPERSUPERFÍCIE M

Sigui ara M una hipersuperfície d'una varietat diferenciable V de dimensió 4. Aquí no suposem, com a les Seccions anteriors, que a V hi hagi cap mètrica. Suposem, això sí, que tenim un camp vectorial T sobre V que en tot punt de M és transvers a M. Sigui φ_t el grup uniparamètric local corresponent a T. Suposem, com a la Secció 2, que existeix $\varepsilon > 0$ tal que $\varphi_t(x)$ està definit per a tot $x \in M$ i tot $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, i que la imatge V_M de $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ per l'aplicació Φ donada per (5) de la Secció 2 és un obert de V. Reprenent la mateixa notació que a la Secció 2, estem ara interessats en el problema següent: donat un camp vectorial N sobre V_M que en cada punt és transvers a les hipersuperfícies M_t, donada una mètrica de Riemann g sobre M i un tensor dues vegades covariant i simètric, p, sobre M, veure si existeix una mètrica de Lorentz $\tilde{g}$ sobre V_M (o sobre un entorn de M de la forma $\Phi(M \times (-\varepsilon', \varepsilon')$ amb $\varepsilon' < \varepsilon$) que compleixi les condicions següents:

1. Sigui g_t la restricció de $\tilde{g}$ a M_t. Llavors $g_0 = g$ i $(\partial g_t/\partial t)_{t=0} = p$.

2. El camp N és perpendicular a totes les hipersuperfícies M_t segons la mètrica $\tilde{g}$ i, a més, $\tilde{g}(N, N) = -1$.

3. El tensor de Ricci de la mètrica $\tilde{g}$, $\mathcal{R}(\tilde{g})$, s'anul·la.

Que N sigui transvers a les hipersuperfícies M_t vol dir que en cada punt $u = \varphi_t(x)$ de V_M hom té $T_u(V_M) = \langle N_u \rangle \oplus T_u(M_t)$. Per tant $T = \partial/\partial t$ es descompondrà de manera única en la forma següent

$$\frac{\partial}{\partial t} = fN - U. \tag{15}$$

Suposem que existeix una mètrica $\tilde{g}$ sobre V_M que compleix les condicions volgudes. Sigui g_t la restricció de $\tilde{g}$ a cada M_t. Sigui (x^1, x^2, x^3) un sistema de coordenades locals de M. Aquestes coordenades donaran lloc a unes coordenades (x^1, x^2, x^3, t) de V_M per mitjà del difeomorfisme Φ. Com que N és perpendicular a les M_t i com que $\tilde{g}(N, N) = -1$, de (15) es desprèn

$$\begin{cases} \tilde{g}_{44}(x,t) = -f_t(x)^2 + g_t((U_t)_x, (U_t)_x) \\ \tilde{g}_{4i}(x,t) = g_t((U_t)_x, \partial/\partial x^i) \\ \tilde{g}_{ij}(x,t) = (g_t)_{ij}(x)\,. \end{cases} \tag{16}$$

Com que la família f_t de funcions sobre M i la família U_t de camps són conegudes a partir de la descomposició (15) de N, les fórmules (16) ens diuen que per a conèixer $\tilde{g}$ basta conèixer la família g_t de restriccions de $\tilde{g}$ sobre les M_t. Anem a veure quines equacions ha de complir la família de mètriques de Riemann g_t sobre M per tal que es compleixi l'equació $\mathcal{R}(\tilde{g}) = 0$. Com a la Secció 2, els camps de M donen lloc a camps de V_M. Siguin, doncs, X i Y dos camps de M (per tant, camps de V_M). Tindrem:

$$N(\tilde{g}(X,Y)) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_N X, Y) + \tilde{g}(X, \tilde{\nabla}_N Y) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X N + [N, X], Y) +$$

$$+ \tilde{g}(X, \tilde{\nabla}_Y N + [N, Y]) = \tilde{g}(P(X), Y) + \frac{1}{f}\tilde{g}([U, X], Y) + \tilde{g}(X, P(Y)) +$$

$$+ \frac{1}{f}\tilde{g}(X, [U, Y]) = 2S(X, Y) + \frac{1}{f}U(\tilde{g}(X, Y)) - \frac{1}{f}(L_U\tilde{g})(X, Y)\,.$$

Substituint aquí N per $(1/f)\,\partial/\partial t + (1/f)U$, i designant per k el doble de la segona forma quadràtica S, $k = 2S$, s'obté:

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = f_t k_t - L_{U_t} g_t\,. \tag{17}$$

Si fem $t = 0$ a (17), obtenim $p = (\partial g_t / \partial t)_{t=0} = f_0 k_0 - L_{U_0} g$. Deduïm d'aquesta expressió que el coneixement de p i g sobre M equival al coneixement de g i k_0. Anem a veure ara quines condicions han de complir les famílies $\{g_t\}$ i $\{k_t\}$ per tal que $\mathcal{R}(\tilde{g}) = 0$.

Recordem que les components del tensor de Ricci $\tilde{\mathcal{R}}$ de $\tilde{g}$ vénen donades per

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\gamma\beta} = \tilde{R}^{\lambda}_{\gamma\lambda\beta} = \tilde{g}^{\lambda\mu}\,\tilde{g}\left(\tilde{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)\frac{\partial}{\partial x^\gamma}, \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right).$$

Si (x^i) es un sistema local de coordenades en un entorn qualsevol d'un punt de M, utilitzant la base $\{\partial/\partial x^i, N\}$ en la qual $\tilde{g}^{44} = -1$ i $\tilde{g}^{4i} = 0$, de l'expressió anterior i de (11), (12) i (14) de la Secció 4, s'obtenen les fórmules següents:

$$\left\{\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}(X,Y) &= \frac{1}{f}\,\frac{\partial S(X,Y)}{\partial t} + \frac{1}{f}\,(L_U S)(X,Y) - 2S(X,P(Y)) - \\ &\quad - \frac{1}{f}\,(\nabla^2 f)(X,Y) + \mathcal{R}(X,Y) + (\operatorname{tr} S)\, S(X,Y) \\ \tilde{\mathcal{R}}(N,X) &= g^{ij}(\nabla_{\partial/\partial x^i} S)\left(X, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) - X(\operatorname{tr} S) \\ \tilde{\mathcal{R}}(N,N) &= -\frac{1}{f}\, g^{ij}\,\frac{\partial S_{ij}}{\partial t} - \frac{1}{f}\,\operatorname{tr}(L_U S) + S.S - \frac{1}{f}\,\Delta_M f, \end{aligned}\right. \tag{18}$$

on X, Y són camps tangents a M, i per tant, camps de V_M tangents a les M_t, $S.S$ indica el producte escalar de S per ell mateix induït per la mètrica g de M, o sigui, $g^{ir} g^{js} S_{ij} S_{rs}$, i $\Delta_M f$ indica el laplacià de f segons la mètrica g de M, o sigui, $-g^{ij}\nabla_i \nabla_j f$. Designem per $S \times S$ la 2-forma definida per $S(X, Y) = S(X, P(Y))$ que apareix a la primera fórmula de (18). (En components, $(S \times S)_{ij} = g^{rs} S_{ri} S_{sj}$). Posem també $k = 2S$. Amb aquesta notació, de (18) obtenim que l'anul·lació del tensor de Ricci de $\tilde{g}$ equival a les equacions següents:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial k_t}{\partial t} = -L_{U_t} k_t + f_t\,(k_t \times k_t) + 2\,\nabla^2{}_M f_t - 2 f_t\, \mathcal{R}(g_t) - \frac{1}{2} f_t (\operatorname{tr} k_t)\, k_t \\ &\delta_t(k_t - (\operatorname{tr} k_t)\, g_t) = 0 \\ &k_t . k_t - 4R_t - (\operatorname{tr} k_t)^2 = 0 . \end{aligned}\right. \tag{19}$$

on l'R_t que apareix a l'última equació indica la curvatura escalar de la mètrica g_t de M_t, i el δ_t de la segona equació indica l'operador de Hodge δ de g_t. En el nostre cas, $\delta(k - (\operatorname{tr} k)\, g)$ és la 1-forma donada en components per

$$\delta(k - (\operatorname{tr} k)\, g)_i = -\nabla^j (k_{ij} - (\operatorname{tr} k)\, g_{ij}) .$$

L'equació (17) i la primera equació de (19) poden ésser considerades com les equacions d'evolució del parell (g_t, k_t) en funció de t. Les dues últimes equacions de (19) ens diuen que el parell inicial (g_0, k_0) sobre $M_0 = M$ no pot ésser qualsevol, sinó que ha de complir aquestes dues equacions per a $t = 0$. Si el parell inicial (g, k) sobre M compleix les condicions

$$\left\{\begin{aligned} &\delta(k - (\operatorname{tr} k)\, g) = 0 \\ &k.k - 4R - (\operatorname{tr} k)^2 = 0 \end{aligned}\right.$$

llavosrs es pot demostrar (vegeu [3]) que existeix un únic parell (g_t, k_t) que compleix les dues equacions d'evolució anteriors i tal que $(g_0, k_0) = (g, k)$. Llavors també es demostra que la solució (g_t, k_t) compleix les dues últimes equacions de (19) per a tot t. Llavors la mètrica $\tilde{g}$ sobre V_M donada per (16) compleix les condicions 1, 2 i 3.

6. PLANTEJAMENT DEL PROBLEMA I PLA DE TREBALL

Suposarem a partir d'ara que la hipersuperfície M de V_M és compacta. Segons hem establert a la Secció 5 tota mètrica $\tilde{g}'$ sobre V_M amb $\tilde{R}(\tilde{g}') = 0$ queda unívocament determinada per un parell (g', k'), on g' és una mètrica de Riemann sobre M i k' un tensor sobre M covariant i simètric, d'ordre 2, ambdós relacionats per les equacions següents:

$$\left\{\begin{array}{ll} \delta_{g'}\,(k' - (tr_{g'}\ k')\,g') & = 0 \\ k' \cdot_{g'} k' - 4R(g') - (\mathrm{tr}_{g'}\ k')^2 & = 0\,. \end{array}\right. \tag{20}$$

on $\delta_{g'}$ indica l'operador δ de Hodge relatiu a la mètrica g' i, anàlogament, $\mathrm{tr}_{g'} k'$ indica que la traça de k' és la traça relativa a la mètrica g'. Per tant, deformar la mètrica inicial $\tilde{g}$ de V_M per mètriques de Lorentz $\tilde{g}'$ pròximes, de manera que sempre es compleixi l'equació d'Einstein en el buit, equival a deformar el parell inicial (g, k) sobre M per parells (g', k') pròxims, de manera que es compleixin sempre les equacions (20).

Per a cada $s \in \mathbf{R}^+$, designem per S_2^s l'espai dels tensors covariants d'ordre 2, simètrics, sobre M, de classe de Sobolev s. Pel lema de Sobolev, S_2^s està contingut a l'espai de tensors d'ordre 2, simètrics i continus, sempre que $s > (3/2) + 2$ (M té dimensió 3). Nosaltres prendrem $s > (3/2) + 2$. Sigui $\mathcal{M}^s$ la intersecció de S_2^s amb l'espai de mètriques de Riemann contínues sobre M. El parell inicial (g, k) corresponent a la mètrica inicial $\tilde{g}$ serà òbviament de $\mathcal{M}^s \times S_2^s$. Considerem l'aplicació següent:

$$\mathcal{M}^s \times S_2^s \xrightarrow{\mathcal{H}} \mathcal{F}^{s-2}$$

$$(g', k') \to k' \cdot_{g'} k' - (\mathrm{tr}_{g'} k')^2 - 4R(g')\,,$$

on $\mathcal{F}^{s-2}$ indica l'espai de funcions sobre M de classe de Sobolev $s - 2$. Com que en el terme $R(g')$ (curvatura escalar de g') intervenen derivades d'ordre 2 de g', $\mathcal{H}$ baixa en dues unitats la classe de Sobolev s. Considerem també l'aplicació següent:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^s \times S_2^s &\xrightarrow{\gamma} \mathcal{X}^{s-1} \\ (g', k') &\to -\delta_{g'} (k' - (\mathrm{tr}_{g'} k') g'), \end{aligned}$$

on $\mathcal{X}^{s-1}$ indica l'espai de camps vectorials sobre M de classe de Sobolev $s-1$. En realitat $\delta_{g'} (k' - (\mathrm{tr}_{g'} k') g')$ serà una 1-forma de classe $s - 1$, però podem identificar l'espai de 1-formes i l'espai de camps vectorials a través de la mètrica inicial g.

Designem per $C_{\mathcal{H}}$ el conjunt $\mathcal{H}^{-1}(0)$ format pels parells $(g', k') \in \mathcal{M}^s \times S_2^s$ tals que $\mathcal{H}(g', k') = 0$. Anàlogament, designem per C_γ el conjunt $\gamma^{-1}(0)$. El nostre objectiu és imposar condicions a la mètrica inicial $\tilde{g}$ de V_M per tal que existeixi un entorn $\mathcal{V}$ del parell inicial (g, k) a $\mathcal{M}^s \times S_2^s$ de manera que $\mathcal{V} \cap C_{\mathcal{H}} \cap C_\gamma$ sigui una subvarietat de $\mathcal{M}^s \times S_2^s$. Quan això passi, tot vector tangent a aquesta subvarietat en el punt inicial (g, k) serà tangent a una corba $(g(t), k(t))$ d'aquesta varietat, tal com desitgem.

Considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^s \times S_2^s &\xrightarrow{\Phi} \mathcal{X}^{s-1} \times \mathcal{F}^{s-2} \\ (g', k') &\to (\gamma(g', k'). \mathcal{H}(g', k')). \end{aligned}$$

Considerem l'aplicació lineal tangent de Φ en el punt inicial (g, k):

$$D_{(g,k)} \Phi : \quad S_2^s \times S_2^s \quad \to \quad \mathcal{X}^{s-1} \times \mathcal{F}^{s-2}.$$

Si el parell inicial (g, k) és tal que l'aplicació anterior és exhaustiva, llavors existeix un entorn $\mathcal{V}$ del punt (g, k) a $\mathcal{M}^s \times S_2^s$ tal que $\mathcal{V} \cap C_{\mathcal{H}} \cap C_\gamma$ és subvarietat de $\mathcal{M}^s \times S_2^s$. Per a veure això comencem designant per E el nucli de $D_{(g,k)} \Phi$. Com que $S_2^s \times S_2^s$ és un espai de Hilbert, E té un suplementari topològic de manera que $S_2^s \times S_2^s = E \oplus F$. Considerem l'aplicació

$$\begin{aligned} S_2^s \times S_2^s = E \oplus F &\xrightarrow{\Psi} E \times \mathcal{X}^{s-1} \times \mathcal{F}^{s-2} \\ u + v &\to (u, \Phi(u + v)). \end{aligned}$$

Com que $E = \ker D_{(g,k)} \Phi$, la derivada $D_2 \Phi$ és un isomorfisme de F sobre $\mathcal{X}^{s-1} \times \mathcal{F}^{s-2}$ i en virtut del teorema de la funció inversa, Ψ és un difeomorisme local entre un entorn de (g, k) a $S_2^s \times S_2^s$ i un entorn de l'origen de $E \times \mathcal{X}^{s-1} \times \mathcal{F}^{s-2}$. Per tant, Ψ es pot invertir en aquests entorns. Llavors $\Psi^{-1}(u, 0)$ donarà una parametrització de $C_{\mathcal{H}} \cap C_\gamma$ en un cert entorn $\mathcal{V}$ de (g, k). El problema es redueix, doncs, a donar condicions sobre (g, k) per tal que $D_{(g,k)} \Phi$ sigui exhaustiva.

La mètrica inicial g indueix un producte escalar a $S_2 \times S_2$ en cada punt x de M. Per exemple, en el punt x de M, el producte escalar de $(S_2 \times S_2)_x$ serà:

$$(h, K)_x \cdot (h', K')_x = g^{ir}(x)\, g^{js}(x)\, (h_{ir}(x)\, h'_{js}(x) + K_{ir}(x)\, K'_{js}(x)) .$$

Amb aquesta definició $(h, K)_x \cdot (h', K')_x$ és funció de x. Designem llavors per $< , >$ el producte escalar global a $S_2^s \times S_2^s$ definit per

$$< (h, K), (h', K') > = \int_M (h, K)_x \cdot (h', K')_x \eta_g ,$$

on η_g és l'element de volum de g.

Introduïm ara un producte escalar a $\mathcal{X} \times \mathcal{F}$, que designarem també per $< , >$, de la manera següent:

$$< (X, f), (X', f') > = 2 \int_M g\ (X,\ X')\, \eta_g + \frac{1}{2} \int_M f f'\, \eta_g .$$

Els coeficients 2 i 1/2 de la definició anterior es posen per tal que alguns càlculs posteriors surtin més senzills. L'operador

$$D_{(g,k)} \Phi\colon \quad S_2^\infty \times S_2^\infty \ \rightarrow\ \mathcal{X}^\infty \times \mathcal{F}^\infty$$

tindrà llavors un adjunt $(D_{(g,k)} \Phi)^*$ respecte als dos productes escalars $< , >$ que acabem d'introduir i que està definit de manera que es compleix:

$$< (D_{(g,k)} \Phi)\, (h, K), (X, f) > = < (h, K), (D_{(g,k)} \Phi)^*\, (X, f) >$$

per a qualsevol parell (h, K) i qualsevol parell (X, f). Aquest operador adjunt donarà un operador per a qualsevol classe de Sobolev s:

$$(D_{(g,k)} \Phi)^*\colon \quad \mathcal{X}^{s-1} \times \mathcal{F}^{s-2} \ \rightarrow\ S_2^{s-4} \times S_2^{s-4} .$$

En virtut d'un teorema general d'operadors el·líptics, si un dels dos operadors $D_{(g,k)} \Phi$ o $(D_{(g,k)} \Phi)^*$ té símbol injectiu, llavors es té la descomposició següent:

$$\mathcal{X}^{s-1} \times \mathcal{F}^{s-2} = (D_{(g,k)} \Phi)\ (S_2^s \times S_2^s) \oplus \ker\, (D_{(g,k)} \Phi)^* .$$

Això ens dóna la següent pauta d'actuació:

1. Calcular explícitament $(D_{(g,k)} \Phi)$ i $(D_{(g,k)} \Phi)^*$.

2. Veure que $(D_{(g,k)} \Phi)^*$ té símbol injectiu.

3. Donar condicions sobre (g, k) que garanteixin que el nucli de $(D_{(g,k)}\Phi)^*$ s'anul·la.

7. CÀLCUL DE $D_{(g,k)}\Phi$ I DE $(D_{(g,k)}\Phi)^*$

De la definició de Φ es desprèn que per a calcular $(D_{(g,k)}\Phi)$ haurem de calcular primer $D_{(g,k)}\gamma$ i després $D_{(g,k)}\mathcal{H}$. De l'expressió en components de l'operador de Hodge s'obté immediatament l'expressió següent:

$$\gamma(g', k')_i = g'^{rs}\nabla'_r k'_{is} - \partial_i(\mathrm{tr}_{g'} k'),$$

on ∂_i indica $\partial/\partial x^i$. Per a calcular l'aplicació lineal tangent de γ en el punt (g, k) s'ha de substituir a l'expressió anterior g' per $g + h$, k' per $k + K$, la derivada covariant ∇' per $\nabla + Q$ com a la Secció 1, i Q per l'expressió (3). Fent tot això i escrivint finalment només els termes lineals en h i K, s'obté:

$$(D\gamma)_{(g,k)}(h, K)_i = \nabla^s K_{is} - \partial_i(\mathrm{tr}\,K) - h^{rs}\nabla_r k_{is} + h^{rs}\nabla_i k_{rs} + \frac{1}{2}(\nabla_i h^{rs})k_{rs} - (\nabla^s h_{sm})k_i^m + \frac{1}{2}\nabla^l(\mathrm{tr}\,h)k_{il}. \tag{21}$$

L'aplicació $\mathcal{H}$ ve donada en components per l'expressió següent:

$$\mathcal{H}(g', k') = g'^{ir}g'^{js}k'_{ij}k'_{rs} - (g'^{ij}k'_{ij})^2 - 4R(g').$$

Per tal d'obtenir l'aplicació lineal tangent s'ha de substituir, com hem fet abans, g' per $g + h$, k' per $k + K$, i $R(g')$ per l'expressió de la curvatura escalar que s'obté de (4) per contracció. Fent tot això i escrivint només els termes lineals en h i K, s'obté:

$$\begin{aligned}(D_{(g,k)}\mathcal{H})(h, K) = &-2h.(k \times k) + 2K.k - 2(\mathrm{tr}\,K)(\mathrm{tr}\,k) \\ &+ 2(\mathrm{tr}\,k)\,h.k + 4h.\mathbf{R}(g) - \\ &- 4\nabla^i\nabla^s h_{is} + 4\nabla^s\nabla_s\,\mathrm{tr}\,h.\end{aligned} \tag{22}$$

Recordem que l'operador adjunt $(D_{(g,k)}\Phi)^*$ està definit de manera que es compleixi sempre la identiat següent

$$\begin{aligned}&< (h, K), (D_{(g,k)}\Phi)^*(X, f) > = < (D_{(g,k)}\Phi)(h, K), (X, f) > = \\ &= 2\int_M g((D_{(g,k)}\gamma)(h, K), X)\eta_g + \frac{1}{2}\int_M (D_{(g,k)}\mathcal{H})(h, K)\, f\, \eta_g.\end{aligned} \tag{23}$$

Per tal de calcular l'expressió de $(D_{(g,k)}\,\Phi)^*$, haurem doncs de calcular per separat les dues integrals que figuren a l'expressió anterior. Preocupem-nos en primer lloc del producte escalar que figura sota la primera d'aquestes integrals. En virtut de l'expressió (21), tindrem:

$$\begin{aligned} g\,((D_{(g,k)}\,\gamma)\,(h,K),X) = {} & (\nabla^s K_{is})\,X^i - (\nabla_i \operatorname{tr} K)\,X^i \\ & - h^{rs}\,(\nabla_r k_{is})\,X^i + h^{rs}(\nabla_i h_{rs})\,X^i \\ & + \frac{1}{2}\,(\nabla_i h^{rs})\,k_{rs}\,X^i - (\nabla^s h_{sm})\,k_i^m\,X^i \\ & + \frac{1}{2}\,(\nabla^l \operatorname{tr} h)\,k_{il}\,X^i\,. \end{aligned} \tag{24}$$

El terme $(\nabla^s K_{is})\,X^i$ de l'expressió anterior es pot escriure $\nabla^s\,(K_{is}X^i) - K_{is}\,\nabla^s X^i$. Ara bé, el primer d'aquests dos termes és una divergència, que quan es multipliqui per l'element de volum i s'integri sobre M s'anul·larà. Per tant, a l'expressió (24) substituirem el primer terme per $-\,K_{is}\,\nabla^s X^i$ + divergència. Farem el mateix amb els altres termes de (24), procurant deixar els factors K i h sense derivades, tot passant aquestes derivades als altres factors. D'aquesta manera ens quedarà finalment:

$$g\,((D_{(g,k)}\,\gamma)\,(h,K),X) = -\,K^{is}\,\nabla_s X_i + \operatorname{tr} K \operatorname{div} X + \frac{1}{2}\,h^{rs}\,(\nabla_i k_{rs})\,X^i -$$

$$-\,\frac{1}{2}\,h.k \operatorname{div} X + h_{sm}\,k_i^m\,\nabla^s X^i - \frac{1}{2}\,\operatorname{tr} h\,(\nabla^l K_{il})\,X^i - \frac{1}{2}\,(\operatorname{tr} h)\,k_{il}\nabla^l X^i + \operatorname{div}.$$

Tenint ara en compte les expressions de la derivada de Lie $L_X k$ i de $L_X g$, i utilitzant també l'equació $\delta_g\,(k - (\operatorname{tr} k)\,g) = 0$ que satisfà el parell inicial (g,k), l'expressió anterior es pot escriure així:

$$\begin{aligned} g\,((D_{(g,k)}\,\gamma)\,(h,K),X) = {} & -\,\frac{1}{2}\,K.L_X g + (\operatorname{tr} K) \operatorname{div} X + \frac{1}{2}\,h.L_X k \\ & -\,\frac{1}{2}\,h.k \operatorname{div} X - \frac{1}{2}\,(\operatorname{tr} h)\,X\,(\operatorname{tr} k) \\ & -\,\frac{1}{4}\,(\operatorname{tr} h)\,k.L_X\,g + \text{divergència}. \end{aligned} \tag{25}$$

Calculant de manera similar el terme $(D_{(g,k)}\,\mathcal{H})\,(h,K)\,f$ que figura dins la segona integral de (23) (aquí es passen a la f les derivades que afecten les h, afegint divergències), s'obté:

$$(D_{(g,k)}\mathcal{H})(h,K)f = -2h(k\times k)f + 2fK.kf - 2(\mathrm{tr}\,K)(\mathrm{tr}\,k)f$$
$$+ 2(\mathrm{tr}\,k)\,h.kf + 4h.\mathbf{R}(g)f - 4h\,\mathrm{Hess}(f) \qquad (26)$$
$$- 4(\mathrm{tr}\,h)\,\Delta f + \text{divergència},$$

on Hess (f) indica el hessià de f, o sigui, $(\mathrm{Hess}\,(f))_{ij} = \nabla_i\nabla_j f$.

L'adjunt $(D_{(g,k)}\Phi)^*$ que busquem, aplicat a un parell (X,f), serà un parell (A,B) de $S_2^\infty \times S_2^\infty$ que complirà:

$$< (h,K), (D_{(g,k)}\Phi)^*(X,f) >=< (h,K),(A,B) >= \int h.A\eta_g + \int K.B\eta_g\,.$$

Tenint ara en compte (23), (25) i (26), deduïm les expressions següents de A i B:

$$A = L_X k - (\mathrm{div}\,X)\,k - X(\mathrm{tr}\,k)\,g - \frac{1}{2}\,(k.L_X g)\,g - (k\times k)f$$
$$+ k(\mathrm{tr}\,k)f + \mathbf{R}(g)f - 2\,\mathrm{Hess}\,(f) - 2\,(\Delta f)\,g \qquad (27)$$

$$B = -L_X g + 2\,(\mathrm{div}\,X)\,g + fk - f(\mathrm{tr}\,k)\,g\,. \qquad (28)$$

8. EL SÍMBOL DE L'OPERADOR $(D_{(g,k)}\Phi)^*$ ÉS INJECTIU

El símbol de l'operador $(D_{(g,k)}\Phi)^*$ associa a cada $\xi \in T_x(M)^*$ l'aplicació lineal σ_ξ de $T_x(M)\times \mathbf{R}$ a $(S_2\times S_2)_x$ donada per $(X,f)\to(\alpha,\beta)$, on α i β vénen donades en components per:

$$\alpha_{rs} = (\xi_r X^i)\,k_{is} + (\xi_s X^i)\,k_{ri} - k_{rs}\,\xi_i X^i -$$
$$- (k^{ij}\,\xi_i X_j)\,g_{rs} - 2\,\xi_r\,\xi_s f + 2\,\xi\,.\,\xi f\,g_{rs}$$
$$\beta_{rs} = -\xi_r X_s - \xi_s X_r + 2\,(\xi_i X^i)\,g_{rs}\,.$$

Hem de suposar que $\xi \neq 0$ i veure que σ_ξ és injectiu. O sigui, que $\alpha=\beta=0$ implica $X=0$ i $f=0$. Prenguem un sistema de coordenades per al qual (g_{rs}) en el punt x sigui la identitat i tal que $\xi=(\xi_1,0,0)$. En aquestes coordenades tindrem:

$$0 = \beta_{22} = \underbrace{-2\,\xi_2\,X_2}_{=0} + 2\,(\xi_1\,X_1)\,.$$

Per tant, $X_1=0$. Llavors $\beta_{21}=0$ implica $X_2=0$, i $\beta_{31}=0$ implica $X_3=0$. Per tant, $X=0$. Substituint llavors $X=0$ a l'equació $\alpha_{22}=0$ s'obté $f=0$.

9. CONDICIONS SOBRE (g, k) PER TAL D'ASSEGURAR L'ANULLACIÓ DEL NUCLI DE $(D_{(g,k)}\Phi)^*$

Sigui (X, f) un parell format per un camp vectorial X sobre M i per una funció f sobre M. Volem veure quines condicions ha de complir aquest parell per tal que sigui del nucli de $(D_{(g,k)}\Phi)^*$. Considerem M com a subvarietat de V_M. Sigui $\tilde{X}$ el camp de V_M amb suport M definit en cada $x \in M$ per $\tilde{X}_x = f(x)\, N_x - X_x$, on N indica, com sempre, el vector normal unitari a la hipersuperfície M de V_M que apunta cap al futur. Com que V_M és difeomorf a $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, el camp $\tilde{X}$ que només està definit sobre M, es pot estendre de manera natural a un camp sobre tot V_M. Sigui ψ_τ el grup uniparamètric associat a $\tilde{X}$. Sigui M_τ la subvarietat de V_M donada per $M_\tau = \psi_\tau(M)$. Si repetim ara tot el procés que hem fet a les Seccions 4 i 5 amb el grup uniparamètric ψ_τ i imposem, com hem fet allà, que el tensor de Ricci de $\tilde{g}$ s'anul·li en cada punt de M_τ, arribarem a unes equacioins d'evolució anàlogues a (17) i a la primera de (19), però que portaran una τ en lloc d'una t. Per exemple, l'equació anàloga a (17) dirà ara

$$\frac{\partial g_\tau}{\partial \tau} = f_\tau k_\tau - L_{X_\tau} g_\tau,$$

on aquí $f_\tau(x) = f(\psi_\tau(x))$ i $(g_\tau)_x = (\psi_\tau^{-1})^* g_{\psi_\tau(x)}$. Aquestes fórmules d'evolució del parell (g_τ, k_τ) ens permeten escriure les components A i B de $(D_{(g,k)}\Phi)^*(X, f)$ donades per (27) i (28) de la manera següent:

$$\left\{\begin{aligned} A &= -\left(\frac{\partial k_\tau}{\partial \tau}\right)_{\tau=0} + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\frac{\partial g_\tau}{\partial \tau}\right)_{\tau=0} k + \operatorname{tr}\left(\frac{\partial k_\tau}{\partial \tau}\right)_{\tau=0} g \\ &\quad - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial g_\tau}{\partial \tau}\right)_{\tau=0} . k\right\} g \\ B &= \left(\frac{\partial g_\tau}{\partial \tau}\right)_{\tau=0} - \operatorname{tr}\left(\frac{\partial g_\tau}{\partial \tau}\right)_{\tau=0} g. \end{aligned}\right. \tag{29}$$

Per tal que (X, f) sigui del nucli de $(D_{(g,k)}\Phi)^*$, A i B s'han d'anul·lar. Prenent traces a la segona de (29), tenim $0 = \operatorname{tr} B = -2\operatorname{tr}(\partial g_\tau/\partial\tau)_{\tau=0}$. L'equació $B = 0$ ens diu llavors que $(\partial g_\tau/\partial\tau)_{\tau=0} = 0$. Substituint llavors això a (29) s'obté fàcilment que $(\partial k_\tau/\partial\tau)_{\tau=0} = 0$. És fàcil de veure (utilitzant el fet que k_τ és el doble de la segona forma fonamental de M_τ) que si $\tilde{X}$ és una isometria infinitesimal de $\tilde{g}$, o sigui, si $L_{\tilde{X}}\tilde{g} = 0$, llavors A i B s'anul·len. Per tant, si la mètrica $\tilde{g}$ no té camps de Killing llavors el nucli de $(D_{(g,k)}\Phi)^*$ s'anul·la.

REFERÈNCIES

1. CHOQUET-BRUHAT, Y. i DESER, S. Stabilité initiale de l'espace-temps de Minkowski. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 1972, **275**, 1019-1027.

2. FISCHER, A. i MARSDEN, J. The Einstein equations of evolution – a geometric approach. *J. Math Phys.*, 1972, **13**, 546-568.

3. FISCHER, A. i MARSDEN, J. The Einstein evolution equations as a first-order quasi-linear symmetric hyperbolic system. *Comm. Math. Phys.*, 1972, **28**, 1-38.

4. FISCHER, A. i MARSDEN, J. Linearization stability of the Einstein equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1973, **79**, 995-1001.

5. GIRBAU, J. A versality theorem for transversely holomorphic foliations of fixed differentiale type. *Illinois J. of Math.*, 1972, **36**, 428-446.

6. GIRBAU, J. i NICOLAU, M. On deformations of holomorphic foliations. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 1989, **39**, 417-449.

7. MARSDEN, J. *Lectures on geometric methods in Mathematical Physics.* Society for industrial and applied Mathematics, 1981.

8. MONCRIEF, V. Spacetime symmetries and linearizatioin stability of the Einstein equations. *J. Math. Phys.*, 1975, **16**, 493-498.

(Original rebut per a publicació el dia 1 de desembre de 1993)